# 论文

## 题目　　曲线的拆解（**Unfolding Curve**）


作　　者　汪晗　宋晨　刘婧孜

指导老师　王玉柱

带队老师　李新德

学校名称　实验中学

**摘要：**本文通过引入一些新的几何概念和方法，试图证明微分几何学中的一个经典公开问题 unfolding.

关键词：Y 类图； 凸多边形

# 目录

1 、问题来源和一些几何概念…………………………………..………4

2、定理的证明………………………………………………………..……5

3、参考文献……………………………………………………………….…20

4、 区分函数与方程……………………………………………………4

# 曲线的拆解（Unfolding Curve）

## 1．问题来源和一些几何概念

**命题描述**

文献[1]中提出了如下的公开问题: 任意 Jordan 曲线上是否存在一种运动,使得在任意时刻曲线上的任意两点间的距离不减,弧长不变.且最终成为一个凸的 Jordan 曲线。

对于该公开问题，有一些初步的讨论(见[2]和[3])。 本文通过引入一些新的几何概念和方法，试图证明这个公开问题。

本文分成以下几部分

1 证明对任意非凸多边形存在一个运动,使得在任意时刻曲线上的任意两点间的距离不减,任意边的边长不变。

2 证明 1 的运动最终能使得在有限时间内能使原曲线演变成凸的多边形。

3 取一列 Jordan 曲线的闭合运动闭集,证明这些运动闭集的无限交非空,且满足命题描述。

若非特殊声明,本文后文均使用以下名词含义:

**多边形**

本文所指的多边形为通常意义下的多边形且满足以下条件

（1），边数大于 3 小于无穷，任何边线段长度不为 0。

（2），顺次连接多边形顶点时不穿过已连接的边。

（3），允许不同的顶点重合，但仍看作多个顶点，允许顶点在另一条线段上。

（4），角度计算为[0,180)。所有顶角不能为 180°，可以为 0°。

## 多边形的运动

本文所指的多边形的运动是指在保持顶点和线段的关系不变，所有边长不变，只改变角度的运动。

## 凸顶点，凹顶点

凸顶点是指内部方向角小于 180°。

凹顶点是指外部方向角小于 180°。

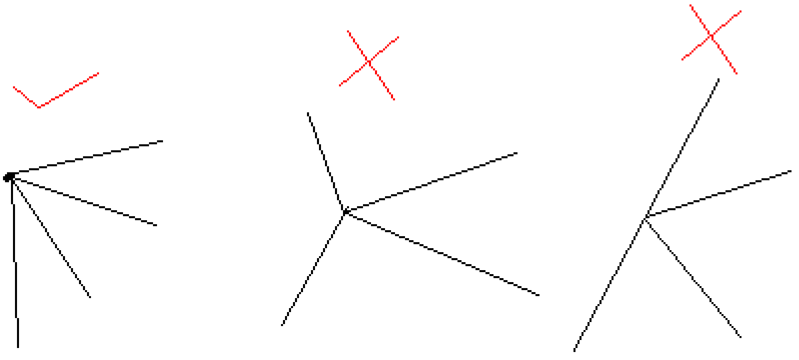
## Y 类图

只有 3 个凸顶点的多边形。特别的，三角形是 Y 类图。

## 好顶点

当一个顶点同时属于多个多边形时，存在一条过此顶点的直线，使得所有从此顶点引出的线段均在此直线的一侧（严格，即不允许线段在此直线内）。

好顶点的意义在于其中的所有角在运动中可同时增大。



# 2. 定理的证明

**引理 1. Y 类图形所有凹顶点角度不减，则所有顶点角度不减。**

首先讨论下图所示的凸多边形

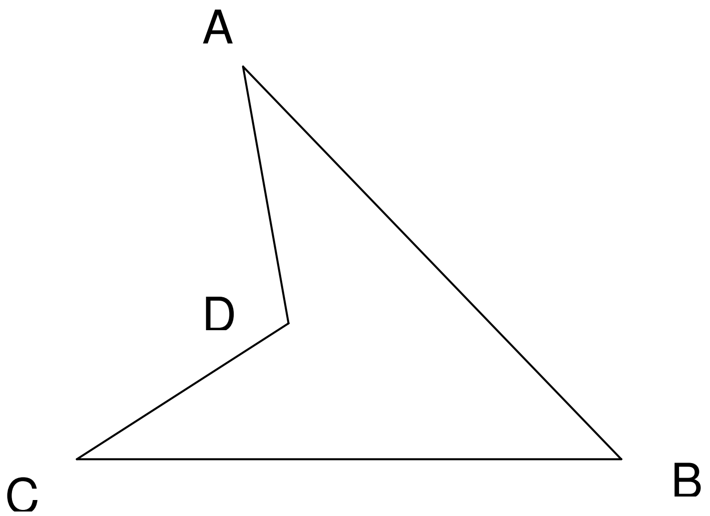



图 1

不妨设 $S_{ADB} > 0$,

$$AD^2 + DC^2 - 2AD \times DC \times \cos\angle D = AB^2 + BC^2 - 2AB \times BC \times \cos\angle B$$

$$\frac{d\cos\angle B}{d\cos\angle D} = \frac{AD \times DC}{AB \times BC}$$

$$\frac{S_{ADC}}{S_{ABC}} = \frac{\sin\angle D \times AD \times DC}{\sin\angle B \times AB \times BC} = \frac{\sin\angle D}{\sin\angle B} \times \frac{d\cos\angle B}{d\cos\angle D} = \frac{d\angle B}{d\angle D} \text{............(1)}$$

同理:

$$AD^2 + AB^2 - 2AD \times AB \times \cos\angle A = DC^2 + BC^2 - 2DC \times BC \times \cos\angle C$$

$$\frac{S_{DCB}}{S_{DAB}} = \frac{d\angle A}{d\angle C} \text{......(2)}$$

又

$$\angle D = \angle A + \angle B + \angle C$$

$$\therefore \frac{d\angle A}{d\angle D} + \frac{d\angle B}{d\angle D} + \frac{d\angle C}{d\angle D} = 1 \text{............(3)}$$

由(1),(2),(3)可得

$$\frac{d\angle A}{d\angle D} = \frac{S_{CDB}}{S_{ABC}} \geq 0, \frac{d\angle B}{d\angle D} = \frac{S_{ADC}}{S_{ABC}} > 0, \frac{d\angle C}{d\angle D} = \frac{S_{ADB}}{S_{ABC}} > 0$$

因此当角 D 增加时,角 B,C 增加,角 A 不减(若 ADB 面积不为 0 则严格

增)。

当有多个凹顶点时(如图 2),

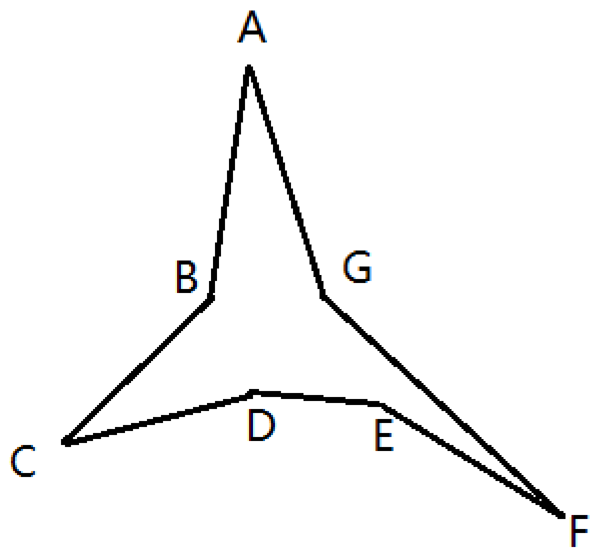



图 2

由于三个凸顶点的角度可由所有凹顶点的角度完全确定，因此可以令

$$\angle A = f_1(\angle B, \angle D, \angle E, \angle G) \ldots (4)$$

对(4)做全微分,得到

$$d\angle A = \frac{S_{CBF}}{S_{CAF}} d\angle B + \frac{S_{CDF}}{S_{CAF}} d\angle D + \frac{S_{CEF}}{S_{CAF}} d\angle E + \frac{S_{CGF}}{S_{CAF}} d\angle G$$

因此引理得证

**引理 2. Y 类图形所有凹顶点角度不减，则任两点距离不减。**

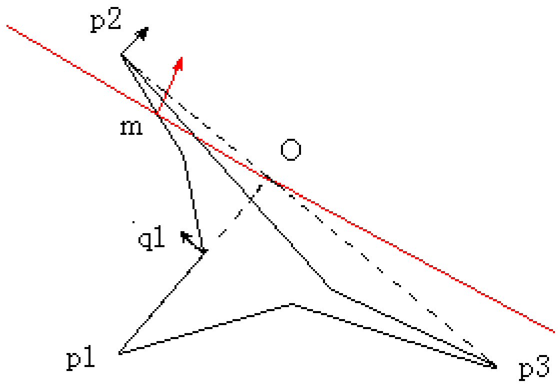



图 3

以凸顶点为界将 Y 类图分为 3 段折线段,属同一折线段上的任两点距离显然增加

如图 3 以 p1p3 为参照系，现只增加 q1 一个凹角的角度，保持其余凹角度数不变，q1p2 段折线的所有点运动均以 O 为瞬心（即 q1p2 折线段作为一个刚体在当前时刻运动为围绕 O 点作旋转。），以 q1p2 段折线上的任意一点 m 为例，

m 与直线 p1p3 位于直线 p2p3 同一侧

=>

m 运动方向与折线段 p1p3 一定位于直线 mo 的两侧。而 m 的运动方向是远离直线 mo 另一侧的点的（m 与在 mo 上的点距离变化率为 0），因此折线段 q1p2 与折线段 p1p3 的任两点距离不减。

仿照引理 1 的第 2 部分证明可知，任两点的距离由所有凹角度数完全确定，因此全微分后距离变化率可以表示成所有凹角变化率的线性组合，且每项均大于 0，因此引理得证。

**引理 3.**

如果一个图 **O** 边界为一多边形，且能划分成 **n** 个**(n>1)Y** 类图，且所有内部及边界的顶点均是好顶点（见定义 **5**）则这个图满足下列 **4** 个引理：

**3.1.** 对 **O** 中任一 **Y** 类图 **X1**，必存在一个异于 **X1** 的 **Y** 类图 **X2** 使得 **O** 去掉 **X2** 仍然为一个多边形，且满足其中两凸顶点之间的折线段是 **O** 的边界。

证明：当 n=2 时命题显然成立。

设当 n=k 时成立，则当 n=k+1 时，

以 X1 的三个凸顶点为分割点，将 X1 的边分为 3 段折线设为 z1,z2,z3，由于 n>1，因此这三段折线必然有一段不全是 O 的边界，因此 z1,z2,z3 至多只有 2 段属于 O 的边界。而 O 至少有 3 个凸顶点，因此必有一段相邻凸顶点之间的折线不包含 z1,z2,z3（这里的不包含折线 z1 是指不包含 z1 的所有线段，可包含部分 z1 的线段，z2,z3 类同）。设为 p1p2，如图。

必然存在一两凸顶点均在 p1p2 折线上的 Y 类图（设为 M）。如图 4 中的红色：

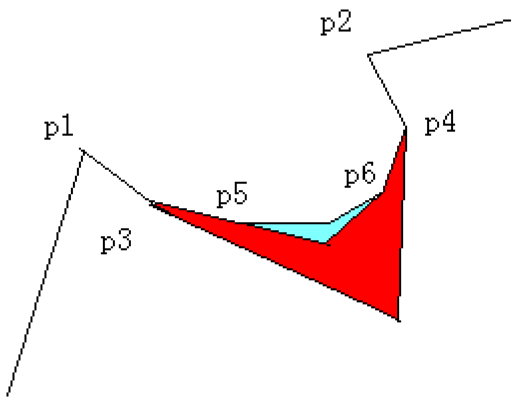



图 4

若 M 将 O 分为 2 块 O1 和 O2（分为 3 块类似）则取其不含 X1 那部分（设为 O1），则 M 与 O1 构成的多边形满足归纳假设，能找到不是 M 的 Y 类图满足条件。若不能将图分为 2 块，则该 Y 类图必有一段从 p3 到 p4 的折线为 O 的边界，即为所求 X2。

**3.2. O 的自由度等于其边界凹顶点个数。**

证明：n=1 时命题成立，设 n=k 时成立，则当 n=k+1 时，去掉 3.1 中的 Y 类图 X2，剩余图设为 O2

设 X2 有 p 个点在 O 的边界上，q 个凸顶点在 O 内部，设 r 为 O 的自由度，s 为 O2 的自由度。因为 X2 有且只有一段折线的点在 O 边界（否则与 3.1 中不分离图形矛盾）。

故 r=s+p-3（3.2.1）

而 X2 内部的凸顶点（如果有的话）恰好对应一个 O2 的凹顶点。

O 比较 O2 新增 p-3+q 个凹顶点，并同时将 q 个凹顶点包在内部。因此 O 恰好比 O2 多出 p-3 个凹顶点，与(3.2.1)计算的自由度增量一致，故命题成立

**3.3. O 的所有凹点不减，则所有凸点不减。**

证明：n=1 时由引理 1 命题成立，设 n=k 时成立，则当 n=k+1 时，任意选定 O 中某个凹顶点 p1，将此凹点所对应的 Y 图看作为 X1，由 3.1 可知，存在一个 X2，将去掉 X2 后的图形设为 O2，现分类讨论

情形 1：X2 三个凸角都对应 O2 中三个凹角如图 5

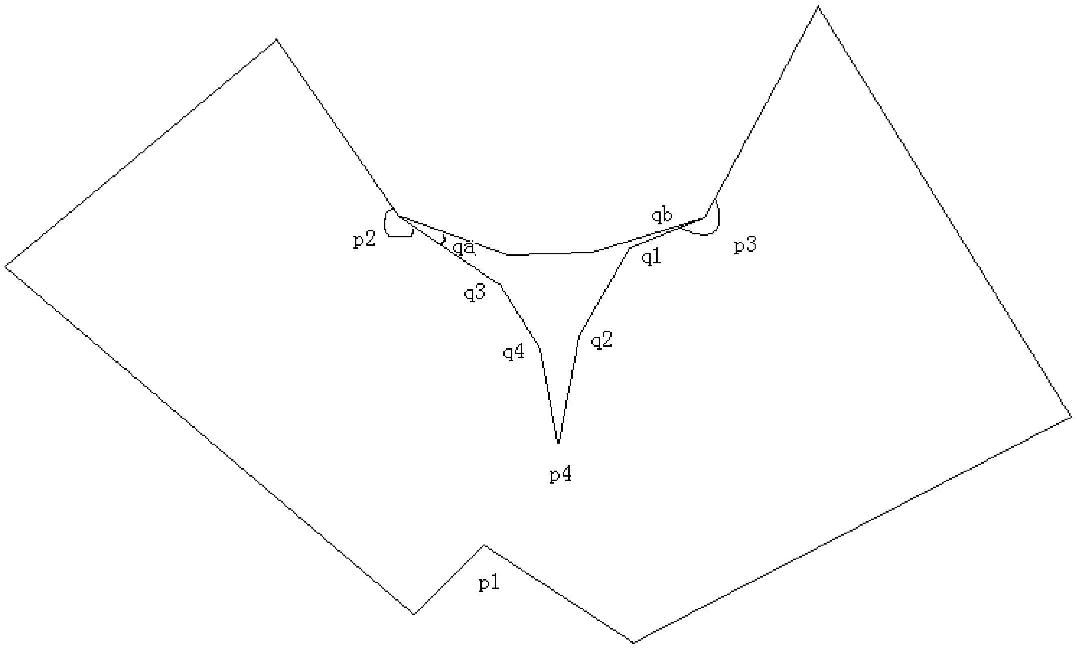



图 5

每个角的变化速度均用该角的符号表示，

现证明当 p2p3 距离不变，且 p2=qa,p3=qb，p1>0 时 p2>0,p3>0,p4>0

即可由归纳假设得到所有角都增大。由归纳法 O2 每凹角不减则凸角不减可得方程组

$$q_i = \sum_{j=1}^{4} k_{ij} p_j ......(i = 1, 2, 3...s)$$

$$k_{ij} \geq 0 \qquad ....................3.1$$

$$\sum_{i=1}^{s} k_{ij} \leq 1 (j = 1, 2, 3, 4)$$

又由 n=1 的情形计算 X2 的内角可得方程

$$p_j = \sum_{i=1}^{s} m_{ij} q_i ........(j = 2, 3, 4)$$

$$m_{ij} \geq 0....(j = 2, 3, 4; i = 1, 2, 3...s) \qquad ................3.2$$

$$\sum_{j=2}^{4} m_{ij} = 1......(i = 1, 2, 3, 4....s)$$

将 3.1 代入 3.2 得：

$$p_j = \sum_{i=1}^{s} m_{ij} (\sum_{t=1}^{4} k_{it} p_t)$$

$$= \sum_{t=1}^{4} p_t (\sum_{i=1}^{s} k_{it} m_{ij}) ........(j = 2,3,4) \quad ...............3.3$$

设 $\sum_{i=1}^{s} k_{it} m_{ij} = u_{tj} (t = 1,2,3,4, j = 2,3,4)$

则 $p_j = \sum_{t=1}^{4} u_{tj} p_t ........(j = 2,3,4)$ ....3.4

设 $\sum_{i=1}^{s} k_{ij} = 1 - k_j ....(k_j \geq 0)...(j = 1,2,3,4)$

$$1 = (\sum_{i=1}^{s} k_{ij}) + k_j = (\sum_{i=1}^{s} (k_{ij} \sum_{t=2}^{4} m_{it})) + k_j = (\sum_{t=2}^{4} \sum_{i=1}^{s} k_{ij} m_{it}) + k_j$$

$$= (\sum_{t=2}^{4} u_{jt}) + k_j ..................(j = 1,2,3,4)$$

$$p_2 = u_{12}p_1 + u_{22}p_2 + u_{32}p_3 + u_{42}p_4$$

$$(u_{22} + u_{23} + u_{24} + k_2)p_2 = u_{12}p_1 + u_{22}p_2 + u_{32}p_3 + u_{42}p_4$$

$$(u_{23} + u_{24} + k_2)p_2 = u_{12}p_1 + u_{32}p_3 + u_{42}p_4 \ldots\ldots\ldots\ldots 3.5.1$$

同理

$$(u_{32} + u_{34} + k_3)p_3 = u_{13}p_1 + u_{23}p_2 + u_{43}p_4 \ldots\ldots\ldots\ldots 3.5.2$$

$$(u_{42} + u_{43} + k_4)p_4 = u_{14}p_1 + u_{24}p_2 + u_{34}p_3 \ldots\ldots\ldots\ldots 3.5.3$$

$3.5.1 + 3.5.2 + 3.5.3$

$$k_2p_2 + k_3p_3 + k_4p_4 = (u_{12} + u_{13} + u_{14})p_1 \ldots\ldots\ldots\ldots 3.5.4$$

$3.5.1 + 3.5.2$

$$(u_{24} + k_2)p_2 + (u_{34} + k_3)p_3 = (u_{12} + u_{13})p_1 + (u_{42} + u_{43})p_4 \ldots 3.5.5$$

$3.5.1 + 3.5.3$

$$(u_{23} + k_2)p_2 + (u_{43} + k_4)p_4 = (u_{12} + u_{14})p_1 + (u_{32} + u_{34})p_3 \ldots 3.5.6$$

$3.5.2 + 3.5.3$

$$(u_{32} + k_3)p_3 + (u_{42} + k_4)p_4 = (u_{13} + u_{14})p_1 + (u_{23} + u_{24})p_2 \ldots 3.5.7$$

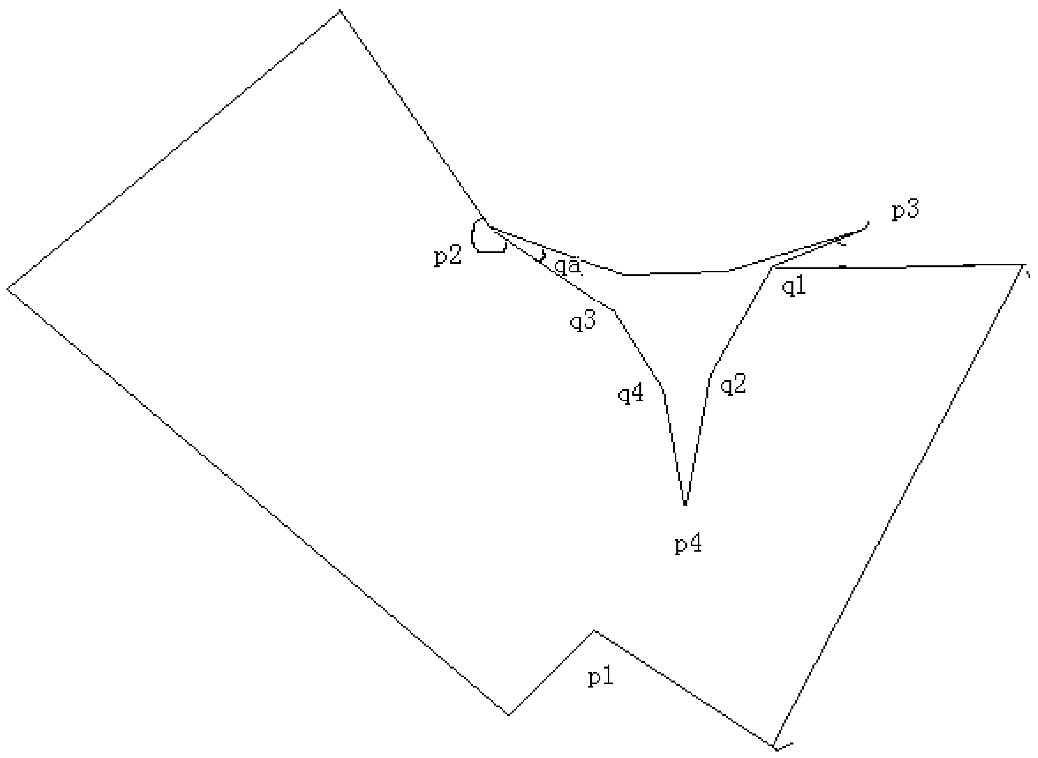
若 p1>0

由 3.5.1，3.5.2, 3.5.3 得 p2,p3,p4 若有一个小于 0，则至少有 2 个小于 0 由 3.5.4 得不能 3 个全小于 0。由 3.5.5,3.5.6,3.5.7 得不能有一个不小于 0 另 2 个小于 0，因此 p2,p3,p4 全大于 0，

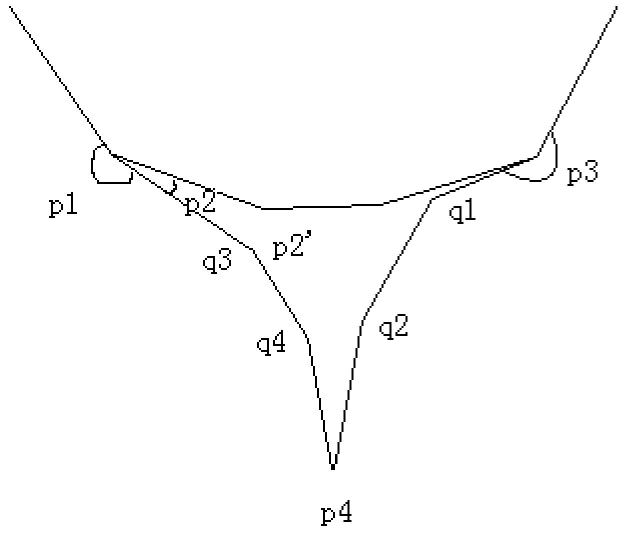
因此由归纳法，当除 p1 点外所有 O 的凹点不变时，所有凸顶点不减

情形 2: 当 p1 不为 p2 或 p3 或 p4 时，

可列出与情形 1 相同的方程，仅仅将某些系数变为了 0，并且所有不等式依然成立。例如下图，方程 3.1 中的 $k_{i3} = 0$ 所有等式与不等式依然成立。




情形 3: p1 即为 p2，此时方程约束之间矛盾，因此需定义新的连接点 p2’为如图




p2’即为 q3 处的一个 0 度角，而将其化为情形 2

此时还需证明 p2<p1

$$\because \sum_{i=1}^{s} q_i \le p_1 + p_3 + p_4$$

$$p_2 = \sum_{i=1}^{s} q_i - p_3 - p_4 \le p_1 + p_3 + p_4 - p_3 - p_4 = p_1$$

$$\therefore p_2 \le p_1$$

等号成立当且仅当 O2 所有除$q_i$外的凸顶点不变。也即 O 的所有边界角不变。也即多边形总面积不变，而内部部分角增加使得内部任两点间距离增加，与总面积不变矛盾。因此等号不能取到，因此$p_2 < p_1$

命题得证。

**引理 4. 所有 n 边形都能通过添加线段的方式将其内部划分为数个 Y 类图。且所有顶点都是好顶点，且添加的约束为 a-3 个，a 为凸顶点个数**（即如引理 3 中的 O）。

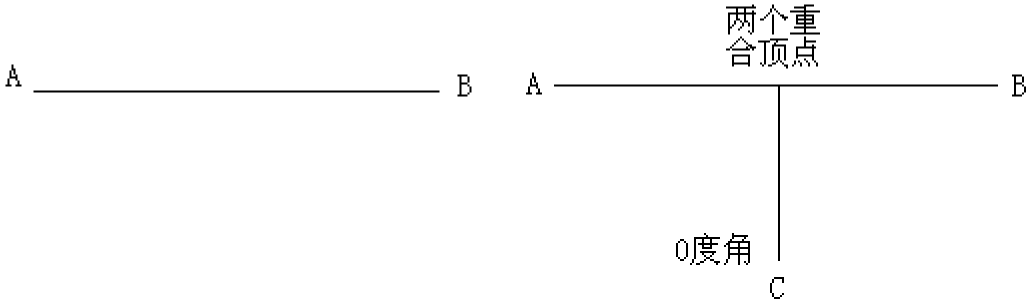
证明：设 n 边形的凸角有 a 个。

对 a 做归纳法，a 不可能小于 3，当 a=3 时,此 n 边形即满足条件，归纳假设当 a=k 时成立，当 a=k+1 时：

将凸顶点顺边编号,在图形内部画出连接 1 号与 3 号顶点的最短折线。则 2 号凸顶点和 4 号凸顶点被此折线分开。选取折线中的能将 2 号凸点和四号凸点分开的一段线段，将此 n 边形分为 2 份（注意折线中任意两相邻线段不平行，因此不存在 180 度的顶点，但允许存在 0 度的顶点。顶点也允许重合。但重合的顶点同样被视为 2 个顶点），这个划分保持了好点依然是好点。并在划分点上多出 2 个凸顶点，但每份多边形至少有 3 个凸顶点，因此由归纳法可知两个多边形可共添加 a+2-6=a-4 个约束，再加上选取的折线一段，共 a-3 个约束，因此命题成立。

**引理 5. 所有的非凸多边形都能运动，满足运动过程中图形任两点距离不减。**

作此多边形的凸包，并且将凸包上的不是原多边形的边界的一段线段开个口，如图：




将此凸包内的每个部分按引理 4 所说的方法分为数个 Y 类图。

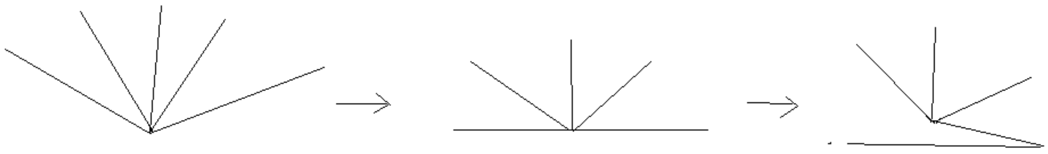
由于一个顶点如果从任意两个引出的线段分成的两侧看都是好顶点时此顶点必是好顶点，因此整个图是一个所有顶点都是好顶点的图，有一个 0° 凹角 C，对应一个自由度。因此由引理 3.3 增大凹角，所有角不减，设在运动后任 2 点 E，F 之间的线段经过的图中的点 G，H，I，则 EF=EG+GH+HI（由引理 2）>运动前的 EG+运动前的 GH+运动前的 HI>运动前的 EF。命题得证。

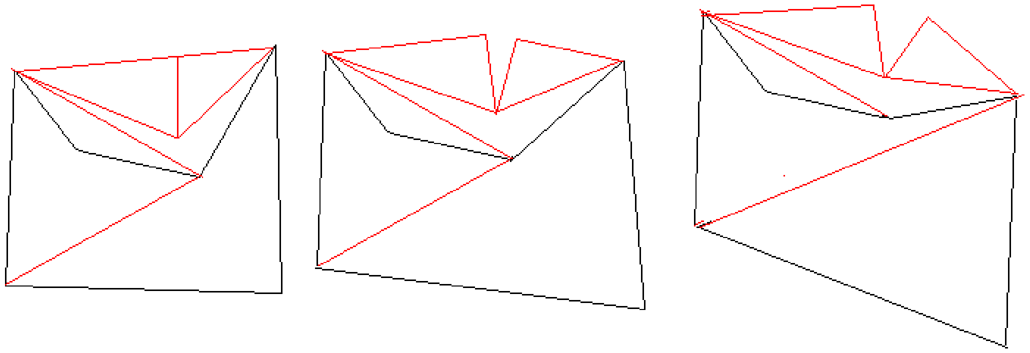
**引理 6. 任意多边形可在有限次满足任两点距离不减的运动后变为凸图形。**

将多边形依引理 5 添加线段约束。

一次运动不再满足引理 3，当且仅当某个凹顶点变为 180 度，此时，将此 180 度点如图般变化，使得其它线段不变的情况下仍然可以继续运动，并保持所有顶点均为好顶点，且总能保持原图像 A 的边不切

断。如图





突变每发生一次，线段总长将增加不小于最短边长的量。顶点数不变，而有限顶点有限面积内的线段总长有上限，因此突变次数不为无穷。运动可以一直持续到图形变为凸图形（仅仅是添加线段后的凸图形，不是原图形变为凸图形）

由于 c 角是 0 度凹角，因此可以以它作为主动点，将它张开成 180 度。这过程中任两点距离不减，因此 C 点会从 AB 之间经过，因此 AB 间的距离运动后会大于 AC+BC

若在运动后 AB 不再是原多边形凸包中的线段，则归纳法可证命题成立，

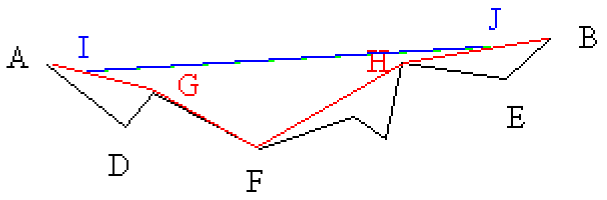
现选取 C 点为使得 AC+BC 最大的点。若命题不成立，则

$\forall \varepsilon > 0, \exists$原图的一个角不减运动使得$AC + BC - AB < \varepsilon$

由于 AB 的距离不能无限大，那么 C 到 AB 的距离上界随之减少直至 0。因此等价于

$\forall \varepsilon > 0, \exists$原图的一个角不减运动使得C到AB的距离小于$\varepsilon$

设 A，B 点不在图形凸包上的线段分别为 AD，BE，那么由于 C 的选取规则，D，E 到 AB 的距离均小于 C 到 AB 的距离，因此当$\varepsilon$足够小时，由于角度不减，只能增加，因此 AB 间所有角的度数将趋近于 180°。如图选取 AB 间的任一个凹点 F，从外侧作最短折线段连接 AF，BF，则这线段内部继续依引理 4 连接，同样满足所有顶点都是好顶点且只有一个凹点 F。AF，BF 外侧折线上任取 2 点（设为 I，J）




设 IJ 距离为 k，当$\angle GFH$增加时

$$\frac{\partial k}{\partial \angle GFH} = IF \times JF \times \sin \angle IFJ$$

$$\frac{\partial k}{\partial \angle IGF} = -IG \times GJ \times \sin \angle IGJ \geq -IF \times JF \times \sin \angle IGJ \geq -IF \times JF \times \sin \angle IFJ$$

$$\frac{\partial k}{\partial \angle IHF} = -IH \times HJ \times \sin \angle IHJ \geq -IF \times JF \times \sin \angle IHJ \geq -IF \times JF \times \sin \angle IFJ$$

$$d\angle GFH > d\angle IGF + d\angle IHF$$

$$\Rightarrow dk = (IF \times JF \times \sin \angle IFJ)d\angle GFH - (IG \times GJ \times \sin \angle IGJ)d\angle IGF$$

$$-(IH \times HJ \times \sin \angle IHJ)d\angle FHJ \geq (IF \times JF \times \sin \angle IFJ)(d\angle GFH - d\angle IGF - d\angle IHF)$$

$$\geq 0$$

即 AB 之间折线任两点距离不减，因此可将顶点 F 运动至 180°。

AB 间的所有凹点可重复上述操作。直至 AB 间所有凹点都变为 180°。

可将原图凸包上的每一段不为原图边界的点重复上述操作，直至所有凹点都变为 180°此即为凸多边形，引理得证。

此时对多边形运动的存在性证毕。

下面证明对以下闭曲线原命题成立

1 曲线不能相交，但允许某一点同属曲线不同的部分（如相切）

2 弧度+外角和（设为$\alpha$）$<+\infty$

由 2 可得弧长$<+\infty$

设原曲线为 Q

取 Q 上的四等分 Q 弧长的点 $p_1, p_2, p_3, p_4$

再取四段弧的中点 $p_5, p_6, p_7, p_8$

再取八段弧的中点……

设 $P_i = \{p_1, p_2 \ldots p_{2^{i+1}}\}$

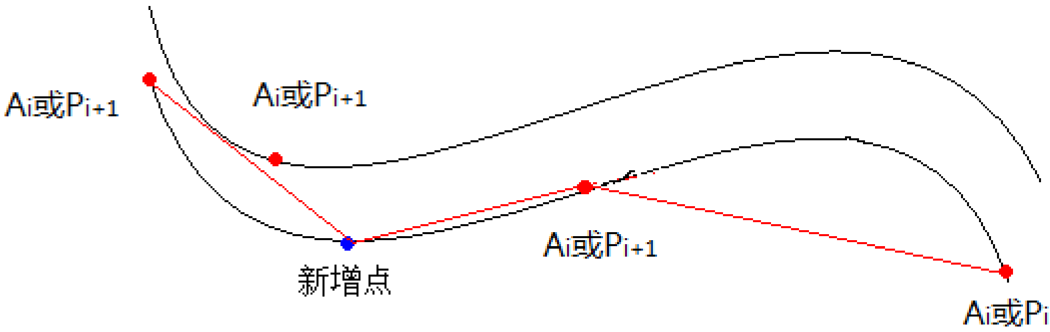
命题 1：能够选取一列多边形 $A_1, A_2, A_3 \ldots$，满足

1， $P_i$ 是 $A_i$ 的顶点

2， $A_i$ 的顶点同时也是 $A_{i+1}$ 的顶点

3， $A_i$ 除了以上顶点外，添加另外顶点，使多边形能够满足文中定义的多边形条件的（1）（2）（3）

证明：顺次连接 1,2 所述的点，当有点位于直线另一侧时添加新点即可使之满足条件 3.如图




**引理 7. 上述多边形的外角和**$\alpha_i < \alpha$

证明略。

令$A_i$如引理 6 般运动，且令$\frac{d\alpha_i}{dt} \equiv k < 0$直到$\alpha_i = 2\pi$即凸多边形，此时由引理 7 有$t_i < \frac{\alpha - 2\pi}{k}$，即

1）所有$A_i$均会以有限角速度有限时间内运动至凸多边形。

2）由于角速度有上界，速度亦有上界

令$\{C_i : (\rho / 2\pi, t) | \rightarrow (x, y)\}$为一列使得 Q 随着$A_i$运动的轨迹，满足：

1，Q 上所有$A_i$的顶点运动轨迹与多边形$A_i$运动轨迹相同

2，Q 上其余点以$A_i$的顶点分割成弧作刚体运动。

则

1　$d(C_i(\rho_{pA_{im}}, t_2), C_i(\rho_{pA_{in}}, t_2)) = d(C_i(\rho_{pA_{im}}, t_2), C_i(\rho_{pA_{in}}, t_2))$，即保持$A_i$任两顶点距离不减

2　$\int_{\rho_1}^{\rho_2} \left| \frac{\partial C_i(\rho, t_1)}{\partial \rho} \right| d\rho = \int_{\rho_1}^{\rho_2} \left| \frac{\partial C_i(\rho, t_2)}{\partial \rho} \right| d\rho$即任两点间弧长不随时间改变

3　$\frac{dC_i}{dt}$一致有界，$C_i$一致有界，因此存在$\{C_i\}$的一致收敛子列$\{C_{n_i}\}$

设$C_{n_i} \rightarrow C$，则$C$显然是连续的，且容易证明$C$就是满足命题条件的运动轨迹。

## 参考文献

[1] Mikhael Gromov, Filling Riemannian manifolds, J. Differential Geom. **18** (1983), no 1, 1-147.

[2] Misha Gromov, Metric structures for Riemannian and non-Riemannian spaces, Birkhauser Boston Inc., Boston, MA, 1999, Based on the 1981 French original [MR 85e: 53051], With appendices by

M. Katz, P. Pansu and S. Semmes, Translated from the French by Sean Michael Bates.
[3] Robert B. Kusner and John M. Sullivan, On distortion and thickness of knots, Topology and geometry in polymer science (Minneapolis, MN, 1996), Springer, New York, 1998, pp.67-78.